सममिति (Symmetry)

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» सममिति क्या है? (परिचय)

» सममिति की रेखा (रेखा सममिति)

» एक से अधिक सममिति की रेखाएँ और सममित आकृतियाँ बनाना

» घूर्णन सममिति और घूर्णन का केंद्र

» सममिति के कोण की गणना (360° ÷ n)

» सारांश - दोनों प्रकार की सममिति और वास्तविक जीवन में उपयोग

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. निम्नलिखित में से कौन सी आकृति सममित है – एक पूर्ण वर्ग (square) या आसमान में तैरता एक बादल?

› वर्ग को देखो – इसके चारों तरफ बराबर भुजाएँ और एक निश्चित पैटर्न है; इसे बीच से मोड़ें तो दोनों भाग बराबर आ जाते हैं।

› बादल को देखो – इसका कोई निश्चित आकार या दोहराव वाला पैटर्न नहीं है; इसे मोड़ने पर दोनों भाग कभी बराबर नहीं आएँगे।

› तुलना करने पर वर्ग में स्पष्ट पैटर्न-दोहराव है जबकि बादल में नहीं।

उत्तर – वर्ग (square) सममित आकृति है; बादल की आकृति सममित नहीं है।

उदाहरण 2. एक समद्विबाहु त्रिभुज (isosceles triangle) ABC में AB = AC है। क्या इस त्रिभुज में कोई सममिति की रेखा है? यदि हाँ, तो कहाँ?

› त्रिभुज में शीर्ष A से भुजा BC के मध्य-बिंदु तक एक रेखा खींचो।

› इस रेखा के अनुदिश त्रिभुज को मोड़कर देखो – चूँकि AB = AC है, दोनों भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं, इसलिए मोड़ने पर बायाँ भाग दायें भाग को पूरी तरह ढक लेगा।

› इसलिए यह रेखा (A से BC के मध्य-बिंदु तक) सममिति की रेखा है।

उत्तर – हाँ, समद्विबाहु त्रिभुज में ठीक एक सममिति की रेखा होती है – शीर्ष कोण से आधार के मध्य-बिंदु तक जाने वाली रेखा।

उदाहरण 3. एक वर्ग ABCD और एक आयत PQRS (जो वर्ग नहीं है) की सममिति रेखाओं की संख्या ज्ञात करो और तुलना करो।

› वर्ग ABCD में मोड़कर जाँचो: लंबरूप मोड़ (1), क्षैतिज मोड़ (2), विकर्ण AC (3), विकर्ण BD (4) – सभी चारों मोड़ों में दोनों भाग पूर्णतः मिलते हैं।

› आयत PQRS में मोड़कर जाँचो: लंबरूप मोड़ (1) और क्षैतिज मोड़ (2) में दोनों भाग मिलते हैं, पर विकर्ण मोड़ने पर भाग आपस में नहीं मिलते।

› इसलिए वर्ग में 4 और आयत में केवल 2 सममिति रेखाएँ गिनी गईं।

उत्तर – वर्ग की सममिति रेखाएँ = 4; आयत (वर्ग नहीं) की सममिति रेखाएँ = 2।

उदाहरण 4. एक वर्ग ABCD को उसके केंद्र के चारों ओर घुमाया जा रहा है। इसके सममिति के कोण कौन-कौन से हैं?

› वर्ग को 90° घुमाने पर बिंदु A, B की जगह, B, C की जगह, C, D की जगह और D, A की जगह पहुँच जाता है – आकृति पहले जैसी ही दिखती है, इसलिए 90° एक सममिति कोण है।

› इसी तरह 180° और 270° घुमाने पर भी वर्ग बिल्कुल पहले जैसा दिखता है।

› 360° पर तो आकृति वापस शुरुआती स्थिति पर आ ही जाती है।

उत्तर – वर्ग के सममिति के कोण हैं – 90°, 180°, 270° और 360° (कुल 4 कोण)।

उदाहरण 5. एक आकृति में 5 बराबर दूरी पर बंटी हुई किरण-संबंधी भुजाएँ हैं। इसके सममिति के सभी कोण ज्ञात करो।

› न्यूनतम सममिति कोण = 360° ÷ 5 = 72°।

› बाकी कोण, 72° के गुणज होंगे: 72°×2 = 144°, 72°×3 = 216°, 72°×4 = 288°।

› अंतिम कोण हमेशा पूरा चक्कर यानी 72°×5 = 360° होगा।

उत्तर – सममिति के कोण हैं – 72°, 144°, 216°, 288° और 360° (कुल 5 कोण)।

उदाहरण 6. एक समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) में सममिति की रेखाएँ और घूर्णन सममिति के कोण दोनों ज्ञात करो।

› सममिति रेखाएँ: समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्षों से सामने की भुजा के मध्य-बिंदु तक 3 रेखाएँ खींचने पर हर मोड़ पर दोनों भाग बराबर मिलते हैं – यानी 3 सममिति रेखाएँ।

› घूर्णन सममिति: त्रिभुज के केंद्र के चारों ओर घुमाने पर, चूँकि इसकी 3 बराबर भुजाएँ हैं, न्यूनतम कोण = 360° ÷ 3 = 120°।

› इसलिए घूर्णन कोण होंगे – 120°, 240°, 360°।

उत्तर – समबाहु त्रिभुज में 3 सममिति रेखाएँ हैं और घूर्णन सममिति के कोण 120°, 240°, 360° हैं – यानी दोनों तरह की सममिति मौजूद हैं।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• परीक्षा में 'सममिति किसे कहते हैं?' जैसे 1-2 अंक के प्रश्न में परिभाषा के साथ एक उदाहरण (जैसे तितली या फूल) जरूर लिखें – पूरे अंक मिलते हैं।

• परीक्षा में अक्षरों (A, B, H, M जैसे) या साधारण आकृतियों में सममिति रेखा दिखाने को कहा जाता है – हमेशा डॉटेड (dotted) लाइन से रेखा दखिाएँ, यह जाँचने वाले शक्षिक को बहुत पसंद आता है।

• 'वर्ग और आयत की सममिति रेखाओं की संख्या में अंतर बताओ' जैसे प्रश्न बहुत आते हैं – हमेशा याद रखें आयत के विकर्ण सममिति रेखा नहीं होते, यह सबसे ज़्यादा पूछी जाने वाली ग़लती की जाँच है।

• 'घूर्णन का केंद्र' और 'सममिति का कोण' की परिभाषा अक्सर अलग-अलग पूछी जाती है – दोनों को मिलाकर मत लिखें, दोनों अलग-अलग चीज़ें हैं (केंद्र = बिंदु, कोण = डिग्री में माप)।

• 360 ÷ n वाले सवाल परीक्षा में बहुत आते हैं – भाग करते समय भन्नि (fraction) में उत्तर आने से मत घबराओ, जैसे 360÷7 = 51 3/7°, यह पूरी तरह सही उत्तर है।

• बोर्ड परीक्षा में अक्सर 'X आकृति में दोनों प्रकार की सममिति हैं या नहीं' पूछा जाता है – हमेशा रेखा और घूर्णन दोनों को अलग-अलग जाँचकर लिखें, एक को दूसरे से मत जोड़ें।

एक नज़र में रिवीज़न

› सममिति = आकृति के भागों में निश्चित पैटर्न का दोहराव, सुंदरता नहीं।

› सममिति की रेखा वह रेखा है जो आकृति को मोड़ने पर दोनों भागों को पूर्णतः एक-दूसरे पर ढकाए।

› आकृति जितनी नियमित (regular) होगी, उतनी अधिक सममिति रेखाएँ होंगी – वर्ग: 4, आयत: 2, समबाहु त्रिभुज: 3।

› घूर्णन सममिति में आकृति एक निश्चित केंद्र के चारों ओर घुमाने पर मूल आकृति जैसी दिखती है; 360° हमेशा एक सममिति कोण होता है।

› न्यूनतम सममिति कोण = 360° ÷ (बराबर भुजाओं की संख्या); बाकी सभी कोण इसी के गुणज होते हैं।

› एक आकृति में सममिति की रेखा, घूर्णन सममिति, दोनों, या कोई भी सममिति नहीं हो सकती – दोनों प्रकार स्वतंत्र गुण हैं।